

# Relazione triennale RTD-B

## Guido Pezzini

### Lavoro di ricerca, articoli e preprint

#### Spazi simmetrici per gruppi di Kac-Moody

Nel corso dei tre anni ho continuato la mia collaborazione col Prof. Bart Van Steirteghem (CUNY ed Erlangen) ad un progetto sulla geometria, le funzioni regolari, e le compattificazioni di spazi simmetrici per gruppi di Kac-Moody.

Le varietà simmetriche hanno un ruolo fondamentale nella teoria dei gruppi algebrici, ed hanno legami con teoria delle rappresentazioni. Esse sono oggetto di ricerca recente nell'ambito dei gruppi e delle algebre di Kac-Moody.

Abbiamo dimostrato che uno spazio simmetrico  $X$  per un gruppo di Kac-Moody  $\mathcal{G}$  ha una struttura naturale di “ind-varietà” affine (struttura di cui  $\mathcal{G}$  stesso è dotato), cioè è un'unione numerabile di varietà algebriche affini, ciascuna chiusa nella successiva. Abbiamo dimostrato che vale un teorema di *struttura locale* su  $X$ , simile al noto risultato dovuto a Brion, Luna e Vust in dimensione finita. Grazie a questo risultato, abbiamo potuto anche dimostrare per  $X$  la proprietà universale fondamentale degli spazi omogenei.

Inoltre ci siamo occupati di funzioni regolari su  $X$ , studiando un sottoanello notevole di funzioni che mostrano un buon comportamento in termini di teoria delle rappresentazioni. Abbiamo anche esteso la definizione del *sistema di radici ristretto* di  $X$ , un oggetto combinatorico fondamentale nel caso classico, ed abbiamo generalizzato al caso Kac-Moody i legami di questo oggetto con le funzioni regolari su  $X$ . Questi risultati ci hanno permesso di costruire compattificazioni di  $X$  come ind-varietà proiettive, e lo studio di esse è oggetto di ricerca ulteriore.

Preprint in preparazione:

- G. Pezzini, B. Van Steirteghem, *Geometry and regular functions of Kac-Moody symmetric spaces*, preprint.

#### Politopi momento di varietà sferiche proiettive

In collaborazione con Stéphanie Cupit-Foutou (Bochum) e con Van Steirteghem, abbiamo studiato i politopi momento di varietà proiettive, sferiche sotto l'azione di un gruppo riduttivo connesso  $G$  (cioè  $G$ -varietà normali dove un sottogruppo di Borel di  $G$  ha un'orbita densa).

Abbiamo mostrato con controesempi che il politopo momento di  $X$  e il suo *reticolo dei pesi* non determinano univocamente  $X$ , rispondendo così in senso negativo ad una domanda contenuta in un articolo di Alexeev e Brion. Abbiamo però dimostrato che è sufficiente aggiungere l'invariante dato dalle *radici sferiche* di  $X$ , per determinare  $X$  univocamente. Oltre a questo risultato di “unicità”, abbiamo anche ottenuto due caratterizzazioni di “esistenza”. Abbiamo cioè dimostrato due criteri che decidono, per un politopo  $P$ , un reticolo di pesi di  $G$ , ed un insieme di (candidate) radici sferiche, se esista una varietà  $X$  che corrisponda a questi invarianti.

Con gli strumenti da noi sviluppati abbiamo potuto estendere i risultati di Pasquier e Gagliardi-Hofscheier sulle varietà sferiche di Fano, ottenendone una classificazione. Abbiamo potuto anche caratterizzare le varietà simplettiche

Hamiltoniane senza molteplicità che ammettono strutture di Kähler compatibili, estendendo risultati di Chris Woodward.

Preprint (sottomesso):

- S. Cupit-Foutou, G. Pezzini, B. Van Steirteghem, *Momentum polytopes of projective spherical varieties and related Kähler geometry*, arXiv:1809.08171

### Monoidi estesi di particolari varietà sferiche

Ho collaborato con Maarten Van Pruijssen (Paderborn) ad un progetto di ricerca su *monoidi estesi* di particolari spazi omogenei sferici.

Il nostro primo risultato è stato dimostrare che il monoide esteso di uno spazio omogeneo sferico deriva in modo diretto e combinatorialmente esplicito da altri invarianti, detti *dati sferici omogenei*, che vengono usati per classificare le varietà sferiche. Questo risultato rende obsoleti i metodi geometrici che sono stati usati finora in letteratura per il calcolo del monoide esteso di casi particolari.

Abbiamo applicato questo risultato ad una classe particolare di spazi omogenei: quelli del tipo  $G/P$ , dove  $G$  è un gruppo semisemplice, e  $P$  è un sottogruppo parabolico di un sottogruppo riduttivo connesso  $H \subset G$ , e tali che  $G/P$  sia una varietà sferica. Questo ha applicazioni in teoria delle rappresentazioni, ed in particolare in problemi di tipo *regole di branching*.

Abbiamo anche applicato i nostri risultati alla teoria, sviluppata da Heckman, Opdam, Schlichtkrull, ecc., dei polinomi speciali a valori matrici, definiti tramite coefficienti matriciali di gruppi di Lie, teoria che generalizza le *funzioni sferiche “zonali” (zonal)* su spazi simmetrici compatti.

Preprint in preparazione:

- M. Van Pruijssen, G. Pezzini, *On the extended weight semigroup and its applications to orthogonal polynomials*, preprint.

### Okounkov bodies globali di varietà sferiche

In collaborazione col Prof. Henrik Seppänen (Göttingen), abbiamo pubblicato un lavoro sugli *Okounkov bodies* globali di varietà sferiche. Iniziata dal lavoro di A. Okounkov, la teoria degli Okounkov bodies è stata ampiamente sviluppata negli ultimi anni, ed ha connessioni con teoria delle rappresentazioni, studio asintotico di sistemi lineari e positività, geometria tropicale, ecc.

Nel nostro lavoro abbiamo introdotto e studiato un cono convesso associato ad una varietà proiettiva  $X$ , sferica sotto l'azione di un gruppo semisemplice  $G$  semplicemente connesso. Questo cono convesso, chiamato *cono momento globale di Okounkov*, è strettamente legato al *global Okounkov body*  $\Delta_\nu(X)$ . Il nostro risultato principale è che, sotto ipotesi non molto restrittive su  $X$ , il cono momento globale di Okounkov di  $X$  è razionale poliedrale. Ciò implica la stessa proprietà per  $\Delta_\nu(X)$ , e risponde perciò in senso positivo, nel nostro ambito, ad una domanda posta in un articolo di Lazarsfeld e Mustata.

- G. Pezzini, H. Seppänen, *On global Okounkov bodies of spherical varieties*, Journal of Lie Theory **29** (2019), 1031–1044.

## Monoidi dei pesi di varietà sferiche di rango massimo

In collaborazione con Van Steirteghem e con Kay Paulus (Erlangen), ho lavorato alla pubblicazione seguente:

- K. Paulus, G. Pezzini, B. Van Steirteghem, *On some families of smooth affine spherical varieties of full rank*, Acta Math. Sinica, English Series **34** (2018), no. 3, 563–596.

In esso studiamo consideriamo le seguenti famiglie di monoidi di pesi dominanti di  $G$ :

1. assumendo  $G$  semplice, i monoidi  $\Gamma$  ottenuti intersecando il monoide di tutti i pesi dominanti di  $G$  con un sottoreticolo di rango massimo del reticolo dei pesi di  $G$  (i monoidi così ottenuti vengono detti  $G$ -saturi di rango massimo);
2. tutti i monoidi per  $G = \mathbb{C}^* \times SL(2)$ ;
3. i monoidi detti *riflessivi* (una definizione tratta dai lavori di Woodward sui politopi riflessivi).

Per ogni famiglia, produciamo una classificazione completa dei monoidi che sono monoidi dei pesi di varietà sferiche affini liscie, usando proprietà del criterio sviluppato da me e Van Steirteghem (v. prossima sezione).

## Caratterizzazione dei monoidi dei pesi delle varietà sferiche affini lisce

Proseguendo lavoro svolto in precedenza, io e Van Steirteghem abbiamo finalizzato e pubblicato una caratterizzazione combinatoria dei monoidi dei pesi delle varietà sferiche affini lisce. Grazie alla teoria sviluppata da Friedrich Knop, questo ha concluso la classificazione combinatoria (esistenza ed unicità) delle varietà simplettiche compatte Hamiltoniane senza molteplicità.

- G. Pezzini, B. Van Steirteghem: *Combinatorial characterization of the weight monoids of smooth affine spherical varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. (2019), pubblicato online DOI: <https://doi.org/10.1090/tran/7785> (in pubblicazione sulla rivista cartacea)

## Sulle $B$ -orbite di certi spazi omogenei sferici

Proseguendo lavoro svolto in precedenza, io e Jacopo Gandini (Pisa) abbiamo finalizzato e pubblicato un lavoro riguardo alle orbite di  $B$  su varietà sferiche del tipo  $G/H$ , dove  $G$  è un gruppo semisemplice complesso,  $B$  un suo sottogruppo di Borel, ed  $H$  è un sottogruppo di  $B$ . Abbiamo ottenuto un modello combinatorio dell'insieme delle  $B$ -orbite di  $G/H$ , insieme che è molto rilevante nella teoria e notoriamente difficile da studiare in generale. Il nostro modello è compatibile con la nota azione del gruppo di Weyl di  $G$  definita da Knop, e fornisce anche informazioni sull'ordinamento delle orbite indotto dall'inclusione delle chiusure.

- J. Gandini, G. Pezzini: *Orbits of strongly solvable spherical subgroups on the flag variety*, Journal of Algebraic Combinatorics **47** (2018), no. 3, 357–401.

## Sottogruppi sferici di gruppi di Kac-Moody, e azioni transitive su varietà sferiche

Proseguendo lavoro svolto in precedenza, ho finalizzato e pubblicato un lavoro riguardo a varietà sferiche per gruppi di Kac-Moody. In esso ho proposto una generalizzazione (parziale) della definizione di tali varietà al caso infinito-dimensionale dei gruppi di Kac-Moody, e ho dimostrato che la combinatoria che governa questa teoria nel caso classico finito-dimensionale si può estendere in modo completo.

Per ottenere questi risultati, ho sviluppato nuovi strumenti per studiare azioni di gruppi non riduttivi su varietà sferiche, studiando sotto ipotesi naturali la geometria delle compattificazioni equivarianti rispetto a tali gruppi.

- G. Pezzini: *Spherical subgroups of Kac-Moody groups and transitive actions on spherical varieties*, *Advances in Mathematics* **312** (2017), 680–736.

## Lecture notes

In seguito ad un invito a tenere un corso sulla geometria delle varietà magnifiche alla scuola/conferenza “Workshop on Spherical Varieties”, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Cina, ho pubblicato le seguenti lecture notes:

- G. Pezzini: *Lectures on Wonderful Varieties*, *Acta Math. Sinica, English series* **34** (2018), no. 3, 417–438.

## Partecipazione a gruppi di ricerca, assegnazione di fondi di ricerca

1. Responsabile scientifico del progetto “Spazi simmetrici e loro generalizzazioni: interazioni fra algebra, geometria, combinatoria”, approvato fra i Finanziamenti di Ateneo per la Ricerca Scientifica, anno 2017, tipologia “Progetti di Ricerca (Piccoli, Medi) - Progetti Medi”, “Sapienza” Università di Roma.
2. Ammesso al finanziamento delle attività base di ricerca (legge 11 dicembre 2016, n.232, art.1, commi 295–302).
3. Partecipazione al progetto “Varietà sferiche e algebre di vertice”, approvato fra i Finanziamenti di Ateneo per la Ricerca Scientifica, anno 2018, tipologia “Progetti di Ricerca (Piccoli, Medi) - Progetti Medi”, “Sapienza” Università di Roma.

## Organizzazione di conferenze e seminari

1. Membro del comitato organizzativo del *Seminario di Algebra e Geometria* del Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”.
2. Membro del comitato organizzativo della conferenza *Algebraic transformation groups: the mathematical heritage of Domingo Luna*, Roma, ottobre 2019.

## Altre attività organizzative

1. Responsabile del Notiziario settimanale dei seminari del Dipartimento di Matematica “G. Castelnuovo”.

## Didattica

Corsi tenuti:

1. Corso *Basi di dati*, secondo semestre, A.A. 2016-2017.
2. Corso di dottorato (corso di letture) *Gruppi algebrici*, primo semestre, A.A. 2017-2018.
3. Corso *Geometria 2*, secondo semestre, A.A. 2017-2018.
4. Corso *Geometria*, Facoltà di Ingegneria, Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale, primo semestre, A.A. 2018-2019.

Attività di relatore di tesi di laurea:

1. Tesi di laurea triennale in matematica: Daniele Pellini, *Alcuni aspetti algebrici e geometrici del gruppo delle trecce*, dicembre 2018 (voto: 109/110).
2. Tesi di laurea triennale in matematica: Lorenzo Marinucci, *Spazi di Eilenberg-MacLane*, luglio 2019 (voto: 110/110 e lode).
3. Tesi di laurea triennale in matematica: Stefano Rando, *Decomposizione di Cartan di gruppi di matrici autoaggiunti*, luglio 2019 (voto: 110/110 e lode).
4. Tesi di laurea triennale in matematica: Leonardo Vannini, in preparazione.
5. Tesi di laurea triennale in matematica: Francesco Verdini, in preparazione.

Altre attività di commissario in sedute di laurea:

1. sessione luglio 2017, lauree triennali; controrelatore per la tesi di Fernando Damiani *Sull'esistenza di insiemi proiettivi non misurabili*.

Roma, 18.9.2019  
FIRMATO  
GUIDO PEZZINI