Relazione del triennio da Ricercatore Tempo Determinato Tipo B

Periodo di riferimento: 01/02/2016-31/01/2019

DIDATTICA

- Anno Accademico 2018/2019: corso di Geometria per il Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale, 9 CFU.
- Anno Accademico 2017/2018: corso di Geometria per il Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale, 9 CFU.
- Anno Accademico 2016/2017: corso di Geometria per il Corso di Laurea in Ingegneria Chimica e Ingegneria della Sicurezza, Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale, 9 CFU. Attività di tutoraggio per il suddetto corso a titolo gratuito.
- Anno Accademico 2015/2016: corso di Geometria, Corso di Laurea in Ingegneria Chimica, Facoltà di Ingegneria Civile e Industriale, 9 CFU. Attività di tutoraggio per il suddetto corso a titolo gratuito.

PARTECIPAZIONE A PROGETTI DI RICERCA

- Progetto di Ateneo Sapienza: "Strutture algebro-geometriche e combinatorie relative a grafi, quiver, Grassmanniane, codici e algebre di Lie", coordinatore S. Capparelli, sottomesso.
- Progetto di Ateneo Sapienza: "Strutture algebro-geometriche e combinatorie relative a grafi, quiver, Grassmanniane, codici e polinomi ortogonali", coordinatore S. Capparelli, finanziamento ottenuto nel 2017.
- Progetto dell'Universitat Politècnica de Catalunya (Barcellona): Geometric, algebraic and probabilistic combinatorics, coordinatori O. Serra e J. Rué, finanziamento ottenuto nel 2018.
- Fondo FFABR per ricercatori del 2017.
- Progetto di Ateneo di Sapienza Università di Roma "Polinomi ortogonali, strutture algebriche e geometriche inerenti a grafi e campi finiti", coordinatore S. Capparelli, finanziamento ottenuto nel 2016.

SOGGIORNI ALL'ESTERO PER COLLABORAZIONE SCIENTIFICA

- Aprile 2018: visita all'Institute of Mathematics of the Freie Universität Berlin per collaborare con Tibor Szabó e il suo gruppo di ricerca.
- Settembre 2018: visita all'Universitat Politécnia de Catalunya per collaborare con Simeon Ball..

PRODUZIONE SCIENTIFICA

- **Principali interessi di ricerca:**

Nell'ambito della matematica discreta, sono stati studiati temi di geometria combinatoria, vale a dire lo studio di geometrie, soprattutto varietà algebriche, su campi finiti e loro eventuali applicazioni a problemi di combinatoria estremale. In particolare, sono state studiate fibrazioni simplettiche su sempicorpo, il numero di Turán di grafi bipartiti completi e i grafi di Ryser.

Le fibrazioni di spazi proiettivi $PG(2n-1,q)$ in $(n-1)$-spazi danno luogo a piani di traslazione di ordine q^n tramite la ben nota costruzione di André-Bruck-Bose e dunque le fibrazioni vengono dette su semicorpo se il piano di traslazione associato è coordinatizzato da un semicorpo. Inoltre, se gli elementi della fibrazione sono totalmente isotropi rispetto ad una polarità simplettica, è possibile ottenere piani di traslazione su semicorpi commutativi. Un modo per ottenere tali fibrazioni è costruire insiemi $\mathbb{F}_q$-lineari dello spazio delle matrici simmetriche di ordine n su $\mathbb{F}_{q^t}$ di dimensione massima disgiunti dalla varietà delle matrici singolari, vale a dire la (n-2)-secante della varietà di Veronese. Il caso n=2 stato estensivamente studiato. Noi ci siamo occupati del caso n=3, classificando gli insiemi $\mathbb{F}_q$-lineari massimali disgiunti della varietà delle secanti della superficie di Veronese su $\mathbb{F}_{q^2}$. In [2] e [p1], siamo giunti al generale e conclusivo risultato che in caratteristica pari si può solo ottenere un piano coordinatizzato da un campo, quindi, in caratteristica pari, un semicorpo commutativo con i pertinenti parametri è necessariamente un campo. In [3], abbiamo studiato il problema in caratteristica dispari e dunque classificato le fibrazioni simplettiche su semicorpo, stabilendo che ce ne possono essere solo di tre tipi.

Uno dei più classici e importanti problemi nell'ambito della combinatoria estremale è quello del sottografo proibito: dato un grafo G, trovare il massimo numero di spigoli in un grafo con n vertici che non contenga un sottografo isomorfo a G. Tale numero viene anche detto numero di Turán di G. Il problema è ancora aperto per i grafi bipartiti. Per il numero di Turán di grafo bipartito completo $K_{s,t}$ esiste un upper bound congetturato sharp e un lower bound ottenuto con metodi probabilistici. Ad oggi, il miglior risultato in letteratura è in [Alon, Rónya, Szabó, Norm-graphs: variations and applications, *J. Comb. Th. Ser. B* 76 (1999), 280-290], dove viene trovato il numero di Turán di $K_{s,t}$ per $t > (s-1)!$. Insieme a Simeon Ball, abbiamo studiato grafi ottenuti mediante varietà algebriche su campi finiti: i vertici del grafo sono punti di uno spazio affine sul campo $\mathbb{F}_q$ e i vertici adiacenti ad un punto P dato sono i punti di una varietà algebrica $\mathcal{V}_P$. La scelta di un'opportuna $\mathcal{V}_P$ permette di costruire grafi senza copie di certi grafi bipartiti completi. Abbiamo ottenuto diversi risultati in tale ambito e, nel triennio 2016-2018, in [1], abbiamo cotruito grafi senza copie di $K_{s,t}$ per $t \geq (s-2)! - 1$ con un numero di spigoli che è maggiore del lower bound probabilistico, quindi, al momento, la migliore costruzione deterministica per $(s-2)! - 1 \leq t \leq (s-1)!$.

Gli ipergrafi di Ryser sono grafi estremali rispetto alla famosa congettura di H.J. Ryser del 1963: se $\mathcal{H}$ è un ipergrafo r-partito e r-uniforme, con matching number ν e cover number τ, allora si congettura che $\tau \leq \nu(r-1)$. Per $r = 2$ è noto che ciò sia vero, mentre per $r \geq 3$ questa congettura è ben lontana dall' essere provata, anche se, in genere, per un ipergrafo si ha $\tau << \nu(r-1)$. Gli ipergrafi estremali rispetto alla congettura sono quelli per cui vale $\tau = \nu(r-1)$ e sono molto rari ad oggi. Per $\nu = 1$, il grafo di Ryser si dice intersecting e ci sono varie costruzioni, derivanti essenzialmente dal piano proiettivo su campo finito, dunque con $r \in \{q+1, q+2\}$, con q potenza di un primo, $r = 2q-1$, con q e $q-1$ entrambi potenza di primo. Per $\nu > 1$ si è congetturato per anni che un grafo di Ryser si potesse ottenere solo con l'unione di ν grafi di Ryser intersecting. Per $r = 3$, P. Haxell, L. Narins, T.Szabó hanno recentemente dimostrato che tale congettura è vera. A.Abu-Khazneh nella sua tesi di dottorato ha invece costruito grafi di Ryser con $r = 4$ e $\nu = 2$ con non sono unione di 2 grafi di Ryser intersecting. In [p2], abbiamo generalizzato tale risultato, costruendo ipergrafi di Ryser con $\nu \geq 2$ e $r = q+1 \geq 4$, q potenza di un primo, che non contengono due ipergrafi di Ryser intersecting disgiunti. Questo è stato fatto modificando opportunamente l'ipergrafo derivante dal piano proiettivo.

Un nuovo interesse di ricerca è nato dalla collaborazione con Stefano Capparelli, membro del Dipartimento SBAI. Si sono studiati polinomi in una variabile a coefficienti interi che formino una base ortogonale dello spazio dei polinomi rispetto ad un opportuno prodotto scalare. Oltre all'importanza intrinseca in algebra e analisi, tali polinomi sono anche importanti in varie applicazioni. In particolare, abbiamo studiato i polinomi di Laguerre generalizzati. In [Even, Gillis, Derangements and Laguerre polynomials, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 79 (1976), 135-143], è stato mostrato come i polinomi di Laguerre semplici possono essere usati per contare una particolare classe di permutazioni, vale a dire i derangement. In [4], oltre ad avere dimostrato nuove relazioni di ricorrenza per i polinomi di Laguerre generalizzati, abbiamo generalizzato il risultato di Even e Gillis, mostrando come i polinomi di Lauguerre generalizzati possono contare i strongly widened derangement e abbiamo ottenuto la relativa funzione generatrice.

Alcune parole sui progetti in corso, vale a dire la costruzione di nuovi archi e codici ad essi associati e lo studio di insiemi lineari di spazi proiettivi finiti.

Dato un codice $[n, k, d]_d$-lineare, si ha il ben noto Singleton bound $d \leq n - k + 1$ e i codici ottimali sono quelli per cui $d = n - k + 1$, quindi la capacità di correzione del codice è massima. Tali codici vengono detti MDS (Maximum Distance Separable). È ben noto che un codice MDS è equivalente ad un arco di $\mathrm{PG}(k-1, q)$, vale a dire un insieme massimale di punti di $\mathrm{PG}(k-1, q)$ tale che ogni k di essi sono in posizione generica, cioè ogni iperpiano contiene al più k punti di un arco. L'applicazione alla teoria dei codici è essenzialmente il motivo per cui si cercano archi in geometrie finite. Gli archi sono oggetti molto rari. Con Simeon Ball stiamo tentando essenzialmente due approcci. Il primo è quello di indebolire l'ipotesi di arco, dunque costruire insiemi di punti di $\mathrm{PG}(k-1, q)$ tali che ogni iperpiano ne contenga al più $k + r$ punti, $r \leq k$. In questo modo si ottengono codici di difetto r rispetto agli MDS. Un altro è quello di generalizzare l'arco di Glynn di $\mathrm{PG}(4, 9)$: stabilito il suo legame con una superficie di $\mathrm{PG}(3, 3)$, siamo abbastanza fiduciosi che sia possibile generalizzare questa costruzione per ottenere archi di $\mathrm{PG}(2^t + n, q^t)$ a partire da particolari varietà algebriche di $\mathrm{PG}(2^t - 1, q)$.

Infinine, con Bence Csajbók e Giuseppe Marino stiamo studiando alcune proprietà degli insiemi lineari di spazi proiettivi finiti. Un insieme $\mathbb{F}_q$-lineare di $\mathrm{PG}(n-1, q^t)$ è un insieme di punti definito da uno spazio vettoriale sul sottocampo $\mathbb{F}_q$ di $\mathbb{F}_{q^t}$. Sottolineiamo che un tale insieme non necessariamente definisce un $\mathrm{PG}(m-1, q)$ in $\mathrm{PG}(n-1, q^t)$, ma può dare luogo alle più svariate configurazioni. Gli insiemi lineari sono stati usati, tra le altre cose, per costruire semicorpi, blocking set e codici di distanza di rango massimo. Il nostro obiettivo è quello di stabilire condizioni minimali per cui un insieme $\mathbb{F}_q$-lineare di $\mathrm{PG}(n-1, q^t)$ risulti anche $\mathbb{F}_{q^s}$-lineare per qualche s/t.

- **Pubblicazioni:**

1. S. Ball e V. Pepe, New forbidden graphs in the norm graph, *Discrete Mathematics*, 339 (2016), 12061211.
2. S. Capparelli e V. Pepe, On symplectic semifield spreads of $\mathrm{PG}(5, q^2)$, q even, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 46 (2017), 275-286.
3. G. Marino e V. Pepe, On symplectic semifield spreads of $\mathrm{PG}(5, q^2)$, q odd, *Forum Mathematicum*, 30 (2018), 497-512.
4. S. Capparelli, A. Del Fra e V. Pepe, Widened derangements and generalized Laguerre polynomials, *The Ramanujan Journal*, accettato per la pubblicazione, doi:https://doi.org/10.1007/s11139-018-0019-6.

- **Articoli sottomessi:**

p1. V. Pepe, Symplectic semifield spreads of $\mathrm{PG}(5, q^t)$, q even.

p2. A. Bishnoi e V.Pepe, Non-intersecting Ryser hypergraphs.

- **Work in progress:**
  - S.Ball e V.Pepe, Arcs and codes.
  - B.Csajbók, G.Marino e V.Pepe, On linear sets of projective spaces with high weight.

COMUNICAZIONI A CONVEGNI INTERNAZIONALI

- "New Ryser hypergraphs arising from Finite Geometries", *Combinatorics 2018*, Arco di Trento, Giugno 2018.
- "Symplectic semifield spreads of $\mathrm{PG}(5, q)$, q even", *The 13th International Conference on Finite Fields and their Applications*, Gaeta, Giugno 2017.
- "On symplectic semifield spreads of $\mathrm{PG}(5, q^2)$, q odd", *Combinatorics 2016*, Maratea, Giugno 2016.

ALTRO

- Membro dell'editorial board della rivista internazionale *Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial.*
- Membro del Team di Supporto al Gruppo di Valutazione della Ricerca del Dipartimento SBAI.
- Membro della commissione qualità del CAD di Ingegneria Chimica.
- Membro del comitato organizzativo del workshop internazionale *Discretaly*, tenutosi l' 1-2 Febbraio 2018 presso il Dipartimento SBAI.

Valentina Pepe